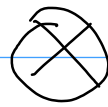


Producto tensorial

Producto tensorial.

(producto de Kronecker)



- Si tenemos dos sistemas aislados S_1 y S_2 . ¿Cómo describir al sistema completo?
 - ¿Cómo relacionar los espacios de estados en problemas de 1D y 3D?
- Definición:

Si $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ son espacios de Hilbert de dim N_1 y N_2 (finita o infinita).

El producto tensorial de los espacios:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \quad (\dim \mathcal{E} = N_1 \times N_2)$$

Si $|\varphi\rangle \in \mathcal{E}_1$ y $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_2$

El producto tensorial de los vectores

$$|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle \in \mathcal{E}$$
$$= |\varphi \psi\rangle$$

Con las siguientes propiedades:

iii) Si $\{|u_i\rangle\}$ es base de E_1 ($\dim N_1$)
 $\{|v_j\rangle\}$ es base de E_2 ($\dim N_2$)

$\{|u_i\rangle \otimes |v_j\rangle\}$ es base de E

$$\dim E = N_1 N_2$$

Con $|\varphi\rangle \in E_1$ y $|\psi\rangle \in E_2$ arbitrarios

$$|\varphi\rangle = \sum_i a_i |u_i\rangle \quad ; \quad |\psi\rangle = \sum_j b_j |v_j\rangle$$

$$|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = \sum_{ij} a_i b_j |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle$$

Ejemplos:

Oscilador armónico en 3D = $1D \otimes 1D \otimes 1D$

$$|\psi\rangle = |n_x\rangle \otimes |n_y\rangle \otimes |n_z\rangle$$

Átomo de hidrógeno con espín: $|n, l, m\rangle \otimes |s, m_s\rangle$

Nota importante:

$\exists$ vectores en E que no se pueden escribir como producto tensorial de vectores en E_1 y E_2 .

Ejemplo Para dos espines $\{|\uparrow\rangle = |s=\frac{1}{2}, m_s=\frac{1}{2}\rangle$
 $|\downarrow\rangle = |s=\frac{1}{2}, m_s=-\frac{1}{2}\rangle\}$

$|\uparrow\downarrow\rangle$: espín 1 en estado $|\uparrow\rangle$ y espín 2 en $|\downarrow\rangle$.

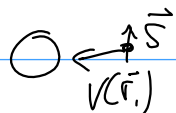
$$|\psi\rangle = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

no se puede escribir como $|u\rangle \otimes |v\rangle$.

Enredamiento cuántico:

Un estado enredado es un estado cuántico multipartita (con más de una parte) que no se puede escribir como $|u\rangle \otimes |v\rangle$.

-Suma de momentos angulares cuánticos.

Motivación $\vec{J}_{\text{total}}$ es cte de mov. {1.  2. 

Consideramos 2 m.a. $\vec{J}_1$ y $\vec{J}_2$

Espacio de estados:

Para $\vec{J}_1$: $|j_1, m_1\rangle$; Para $\vec{J}_2$: $|j_2, m_2\rangle$

Para el sistema compuesto $\{|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle\}$

$|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$ es un e-vector de J_1^2, J_{1z}, J_2^2 y J_{2z}

→ Definimos el producto tensorial

de A y B como

$$(A \otimes B)(|\psi\rangle|\phi\rangle) = (A|\psi\rangle) \otimes (B|\phi\rangle)$$

$$(A \otimes \mathbb{1}_2)(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) = (A|\psi\rangle) \otimes (\mathbb{1}_2|\phi\rangle) = (A|\psi\rangle) \otimes |\phi\rangle$$

$$J_1^2 |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

$$J_{1z} \otimes \mathbb{1}_2 \rightarrow J_{1z} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = \hbar m_1 |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

$$J_2^2 |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = \hbar^2 j_2(j_2+1) |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

$$\mathbb{1}_1 \otimes J_{2z} \rightarrow J_{2z} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = \hbar m_2 |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

$\{J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}\}$ es un CLOC en $E = E_{j_1} \otimes E_{j_2}$

Definimos $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{J}_1 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes \vec{J}_2$

$$(J_x, J_y, J_z) = (J_{1x} + J_{2x}, J_{1y} + J_{2y}, J_{1z} + J_{2z})$$

operan en espacios distintos

$$\begin{aligned} [J_x, J_y] &= [J_{1x} + J_{2x}, J_{1y} + J_{2y}] = [J_{1x}, J_{1y}] + \cancel{[J_{1x}, J_{2y}]} + \cancel{[J_{2x}, J_{1y}]} + [J_{2x}, J_{2y}] \\ &= i\hbar J_{1z} + i\hbar J_{2z} \\ &= i\hbar J_z \end{aligned}$$

Análogamente los demás casos y $[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$

$\therefore \vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ es un momento angular

$\therefore$ Podemos encontrar e-vectores compartidos de J^2 y J_z .

Como $\vec{J}$ es un m.a. J una base $|j m\rangle$
Además existe la base $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$.

El problema de suma de momentos angulares consta de encontrar una base de e.v. para J^2 y J_z en términos de e.v. para $J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}$ (con $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$)

$$\begin{array}{ccc} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle & \longleftrightarrow & |j_1 j_2 j m\rangle \\ & \text{Mismo \#} & \\ & \text{de elementos} & \\ -j_1 \leq m_1 \leq j_1 & & |j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \\ -j_2 \leq m_2 \leq j_2 & & m = m_1 + m_2 \end{array}$$

$O_o: j \neq j_1 + j_2$

¿Por qué?

Es fácil saber cuál es la base en cada caso. La dificultad radica en cómo relacionar las.

tarea
(para que las bases tengan mismo tamaño)

Ejemplo 2:

$$j_1 = 1/2 \quad j_2 = 1$$

$$|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle \rightarrow \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} 1 -1 \right\rangle, \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 -1 \right\rangle$$

$$\left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} 1 0 \right\rangle, \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 0 \right\rangle$$

$$\left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} 1 1 \right\rangle, \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 1 \right\rangle$$

6 estados

$$\frac{1}{2} = |j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 = \frac{3}{2}$$

$$|j m\rangle \rightarrow \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle, \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\left| \frac{3}{2} -\frac{3}{2} \right\rangle, \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle, \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle, \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle$$

6 estados

$$\mathbb{I} = \sum_{j'_1 j'_2} \sum_{m_1 m_2} |j'_1 m_1, j'_2 m_2\rangle \langle j'_1 m_1, j'_2 m_2|$$

$$\mathbb{I} = \sum_{j'_1 j'_2} \sum_{j, m} |j'_1 j'_2 j m\rangle \langle j'_1 j'_2 j m|$$

$$|j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{j'_1 j'_2} \sum_{m_1 m_2} |j'_1 m_1, j'_2 m_2\rangle \underbrace{\langle j'_1 m_1, j'_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle}_{\text{número complejo}}$$

Coeficientes de
Clebsch-Gordan

Conversamente

$$|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle = \sum_{j'_1 j'_2} \sum_{j, m} |j'_1 j'_2 j m\rangle \underbrace{\langle j'_1 j'_2 j m | j_1 m_1, j_2 m_2\rangle}_{\text{número complejo}}$$

Método sin fuerza bruta
 Como $|3/2 \ 3/2\rangle = \sum_{m_1+m_2=3/2} C_{jm}^{j_1 m_1 j_2 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |1/2 \ 1/2 \ 1\rangle$

→ Aplicando $J_- = J_{1-} + J_{2-}$ obtenemos:

$$|3/2 \ 3/2\rangle \xrightarrow{J_-} |3/2 \ 1/2\rangle \xrightarrow{J_-} |3/2 \ -1/2\rangle \xrightarrow{J_-} |3/2 \ -3/2\rangle$$

$$|1/2 \ 1/2\rangle = \underbrace{\alpha |1/2 \ 1/2 \ 10\rangle + \beta |1/2 \ -1/2 \ 11\rangle}_{m_1+m_2=1/2} + \cancel{\gamma |1/2 \ 1/2 \ 00\rangle}?$$

Obtenemos α y β notando que:

* $|1/2 \ 1/2\rangle$ debe estar normalizado

* $|1/2 \ 1/2\rangle$ debe ser ortogonal a $|3/2 \ 1/2\rangle$

Esto los define salvo por una fase global que podemos elegir.

Luego $|1/2 \ 1/2\rangle \xrightarrow{J_-} |1/2 \ -1/2\rangle$

Para pasar de una base a otra:

- fuerza bruta {
- Escribir J^2 y J_z en la base $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ y diagonalizar.
 - $J_z = J_{1z} + J_{2z}$
 - $J^2 = (\vec{J}_1 + \vec{J}_2)^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2 \vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2$
 $= J_1^2 + J_2^2 + 2 J_{1z} J_{2z} + J_{1+} J_{2-} + J_{1-} J_{2+}$

- Obtenemos $|j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{j'_1 m'_1 j'_2 m'_2} C_{jm}^{j'_1 m'_1 j'_2 m'_2} |j'_1 m'_1 j'_2 m'_2\rangle$

Coeficiente de Clebsch-Gordan

- $C_{jm}^{j_1 m_1 j_2 m_2}$ Son cero a menos que:

$$m_1 + m_2 = m$$

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

Ojo: $j \neq j_1 + j_2$

↓

$$\langle j m | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle$$

($j_1 = j'_1, j_2 = j'_2$)